Dipl.-Ing.(FH) Kuno Futterknecht
Ing.-Büro für Feinwerktechnik
D-87616 Wald/Ostallgäu

Der Drehwinkel Beta des radial abgebogenen, nicht fest eingespannten Federschenkels an der Drehfeder

Bei Drehfedern wird das erforderliche Drehmoment über den Drehwinkel α am Federkörper erzeugt.
Die Krafteinleitung auf den Federkörper wirkt über einen freien, nicht fest eingespannten Federschenkel der sich unter Belastung um die Bogenlänge s, im Abstand R von der Drehfedermitte, verformt.
Dabei ergibt sich ein zusätzlicher Drehwinkel

$$\beta = \frac{180°}{\pi}\left(\frac{s}{R}\right)$$

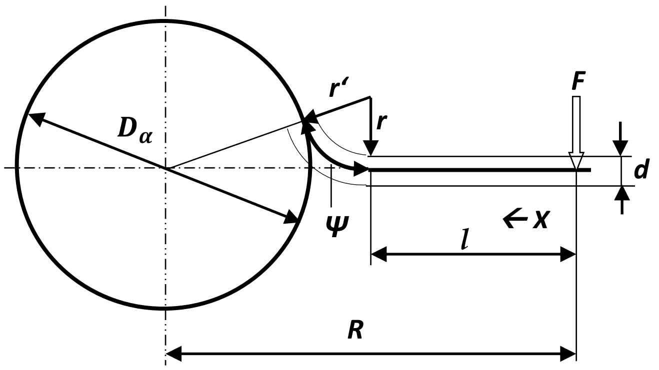
In **DIN EN 13906-3_2014-06** Gleichung **(23)** wird jedoch der Abbiegeradius $\boldsymbol{r}$ an dem Federschenkel für die Berechnung des Biegewinkels $\boldsymbol{\beta}$ vernachlässigt. Das ist sicher für kleine Abbiegeradien im Verhältnis zur Länge des Federschenkels zu vertreten. Bei Radien größer dem Drahtdurchmesser, bedingt durch konstruktive Vorgaben sowie zur Verringerung der Spannungs-Belastung, ist für die Ermittlung des zu erwartenden Drehwinkels $\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ eine genaue Berechnung des Drehwinkels $\boldsymbol{\beta}$ erforderlich.

Mit dem Abbiegeradius in der neutralen Faser $\boxed{r' = (r + d/2)}$ **[a]**

ist der Abbiegewinkel $\boxed{\psi = arccos\left(\frac{2r'}{D+2r'}\right)}$ **[b]**

und mit dem mittleren Durchmesser $\boxed{D_\alpha = D \cdot \left[\frac{n}{n \pm \left(\frac{\alpha}{360}\right)}\right]}$ **[b]**

unter schließender (+) bzw. (-) öffnender Belastung wird:



$$\boxed{l = R - \sqrt{\left(\frac{D_\alpha}{2} + r'\right)^2 - r'^2}} \quad \textbf{[d]}$$

$$L = l + r' \cdot \psi$$

$$s_{r'\psi} = \frac{64\,F\,L^3}{\pi\,E\,d^4 \cdot 3}$$

und damit der Drehwinkel $\boxed{\beta_{r'\psi} = \frac{180° \cdot 64\,F\,(l + r' \cdot \psi)^3}{\pi^2 E\,d^4\,R \cdot 3}}$ **[e]**

Der Einfluss des Abbiegeradius im Verhältnis zum geraden Federschenkelbereich zeigt der Faktor

$$m = \frac{l}{r'}$$

$$l = r' \cdot m$$

somit wird $$\beta_{r'\psi} = \frac{180° \cdot 64\, F\, r'^3 (m+\psi)^3}{\pi^2 E\, d^4\, R \cdot 3}$$

Im Verhältnis zur Gleichung **(23)** in **DIN EN 13906-3**: $\boxed{\beta = \frac{180° \cdot 64\, F\, (2R - D_\alpha)^3}{\pi^2 E\, d^4\, R \cdot 3 \cdot 8}}$

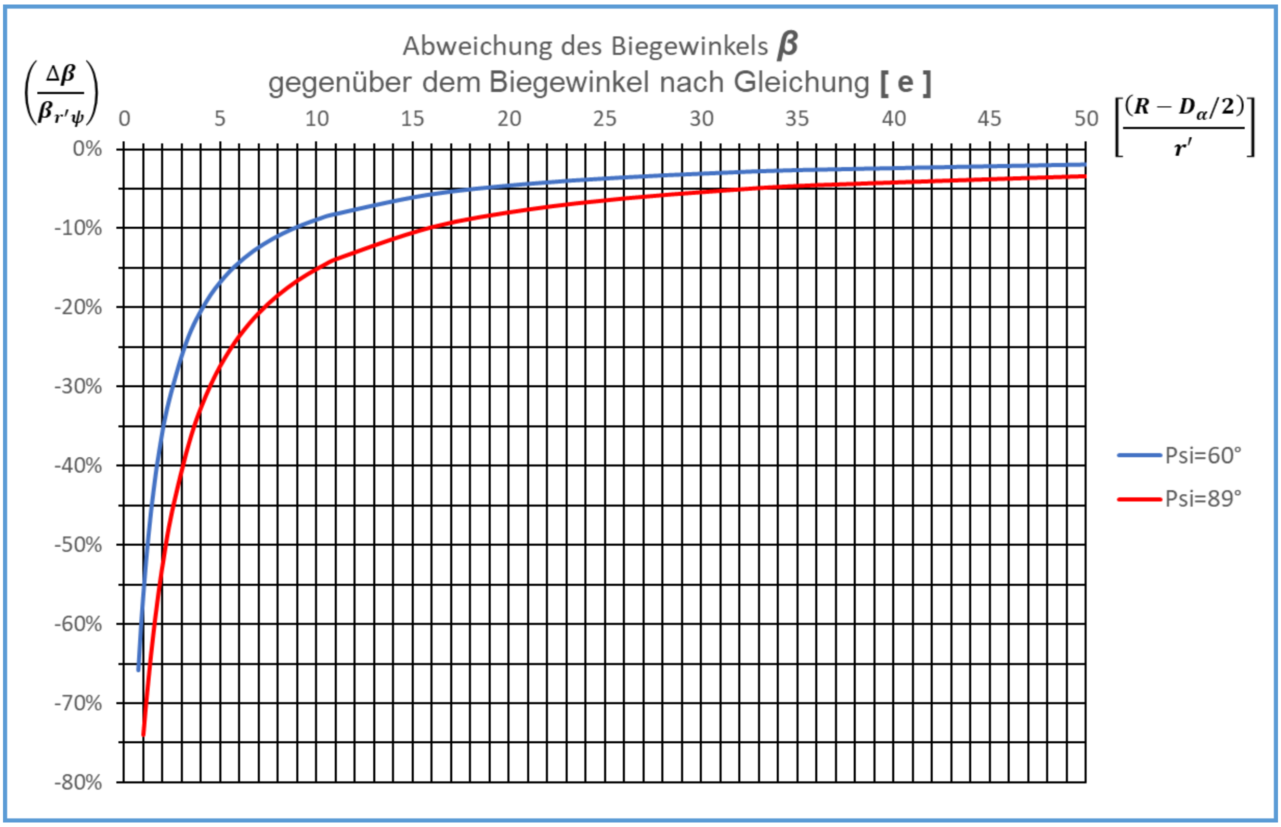
mit

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{D_\alpha}/\mathbf{2}) = [l + r' \tan(\psi) - D_\alpha/2] \rightarrow \quad \boldsymbol{r'}[\boldsymbol{m} + \mathbf{tan}(\boldsymbol{\psi}) - (\mathbf{1}/\mathbf{cos}(\boldsymbol{\psi}) - \mathbf{1})]$$

wird $$\beta = \frac{180° \cdot 64\, F\, r'^3 [m + tan(\psi) + 1 - 1/\cos(\psi)]^3}{\pi^2 E\, d^4\, R \cdot 3}$$

und die relative Abweichung

$$\left(\frac{\Delta\beta}{\beta_{r'\psi}}\right) = \left(\frac{\beta - \beta_{r'\psi}}{\beta_{r'\psi}}\right) \rightarrow \left\{\frac{[m + tan(\psi) + 1 - 1/\cos(\psi)]^3}{(m+\psi)^3} - 1\right\} = f\left(\left[\frac{(R - D_\alpha/2)}{r'}\right]\right)$$



Der Abbiegewinkel $\boldsymbol{\psi}$ am Außendurchmesser der Drehfedern zum Federschenkel liegt in der Praxis zwischen 60° und 89°

Jedoch die theoretische Verformung des gesamten Federschenkels ergibt sich aus dem Biegemoment der Teilbereiche:

$$M = F \cdot x_{(i)} + F \cdot [l + r' \cdot \sin(\psi_{(j)})]$$

Mit $s_{l,r'} = \frac{F}{EJ}\left\{\int_0^l x_{(i)}^2 \, dx + \int_0^{\psi}\left[l + r' \sin\left(\psi_{(j)}\right)\right]^2 d\psi\right\}$

$$s_{l,r'} = \frac{64\,F}{\pi\,E\,d^4}\left[\frac{1}{3}l^3 + r'l^2\psi + 2r'^2 l(1-\cos(\psi)) + r'^3\left(\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\psi)\right)\right]$$

in die Gleichung für den Drehwinkel: $\beta_{l,r'} = \frac{180°}{\pi}\left(\frac{s_{l,r'}}{R}\right)$

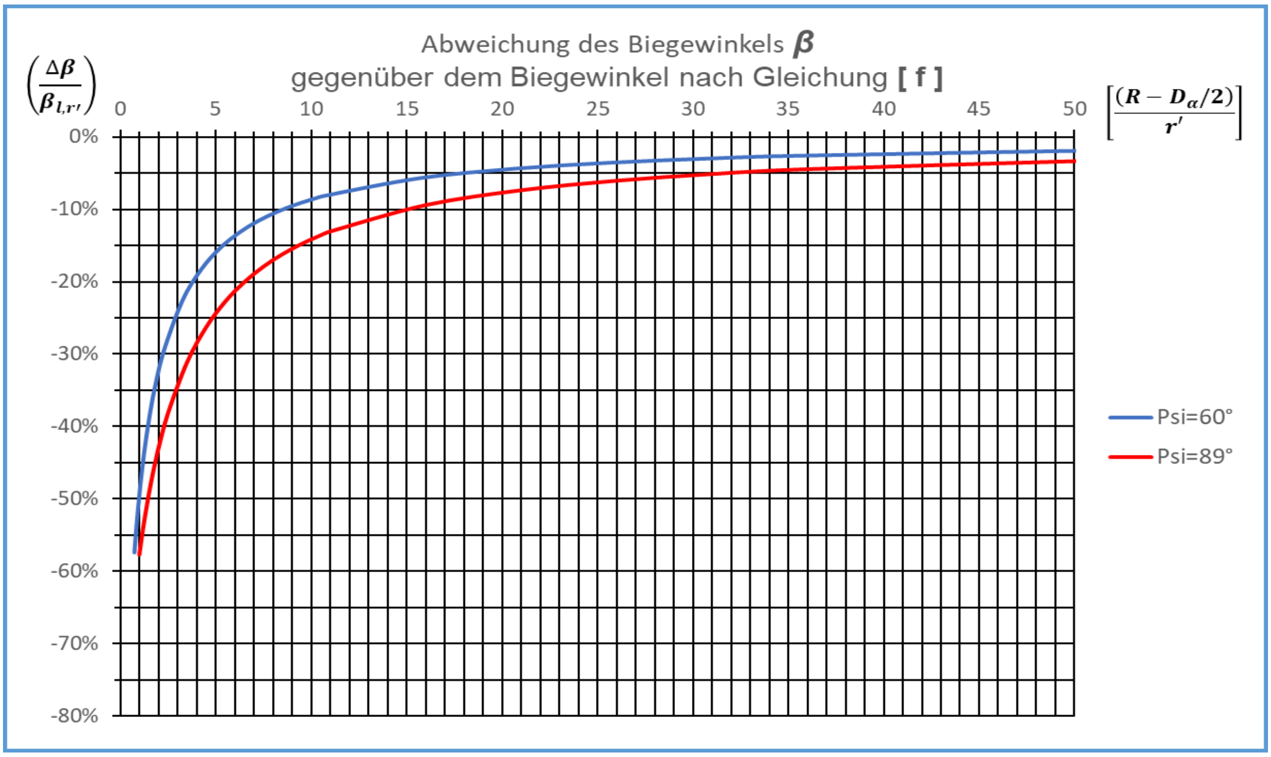
$$\boxed{\beta_{l,r'} = \frac{180 \cdot 64\,F}{\pi^2\,E\,d^4 R}\left[\frac{1}{3}l^3 + r'l^2\psi + 2r'^2 l(1-\cos(\psi)) + r'^3\left(\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\psi)\right)\right]}$$

und mit $l = r'm$ **[f]**

$$\beta_{l,r'} = \frac{180 \cdot 64\,F\,r'^3}{\pi^2\,E\,d^4 R}\left[\frac{1}{3}m^3 + m^2\psi + 2m(1-\cos(\psi)) + \frac{\psi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\psi)\right]$$

wird die relative Abweichung $\left(\frac{\Delta\beta}{\beta_{l,r'}}\right) = \left(\frac{\beta - \beta_{l,r'}}{\beta_{l,r'}}\right)$

$$\left(\frac{\Delta\beta}{\beta_{l,r'}}\right) = \left\{\frac{[m + tan(\psi) + 1 - 1/\cos(\psi)]^3}{3 \cdot \left[\frac{1}{3}m^3 + m^2\psi + 2m(1-\cos(\psi)) + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\psi)\right]} - 1\right\} = f\left(\left[\frac{(R - D_\alpha/2)}{r'}\right]\right)$$



Bereits bei einem Verhältnis der errechneten Federschenkellänge zum Abbiegeradius $\left[\frac{(R-D_\alpha/2)}{r'}\right] < 15$ zeigt die Berechnung des Drehwinkels nach DIN eine Abweichung von **> |5%|** und liegt bei einem Verhältnis **< 5:1** bei **-15% bis -25%**.

Die Abweichung steigt bis **> |50%|** bei einem Verhältnis von **1:1**.

Sollen Anwendungen mit einem Verhältnis **Länge/Radius < 4:1** berücksichtigt werden ist die Berechnung des Drehwinkels $\boldsymbol{\beta_{l,r'}}$
aus den Biegemomenten der Teilbereiche einzusetzen, Gleichung **[f]**,
wie nachfolgende Gegenüberstellung zu $\boldsymbol{\beta_{r'\psi}}$, Gleichung **[e]**, zeigt.

$$\left(\frac{\Delta\beta_{r'\psi}}{\beta_{l,r'}}\right) = \left(\frac{\beta_{r'\psi}-\beta_{l,r'}}{\beta_{l,r'}}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta\beta_{r'\psi}}{\beta_{l,r'}}\right) = \left\{\frac{(m+\psi)^3}{3\cdot\left[\frac{1}{3}m^3+m^2\psi+2m(1-\cos(\psi))+\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin(2\psi)\right]} - 1\right\} = f\left(\left[\frac{(R-D_\alpha/2)}{r'}\right]\right)$$