

Dipl.-Ing. (FH) Kuno Futterknecht

## 1 Problemstellung

Mit den vorgegebenen Werten wie Federweg, Federkraft und meist zu geringem Einbauraum – und vielfach noch die Aufgabe einer Multifunktion an das Energiespeicherelement «Feder» sowie billigste Herstellung, Montage und Automatisierbarkeit – ist der konstruktive Spielraum zur Entwicklung eines Federbauteiles stark eingegrenzt.

Wenn zudem große elastische Verformungen gefordert werden, erscheint dem Konstrukteur die Schulliteratur zu oberflächlich und die Fachliteratur zu speziell, um sein Problem lösen zu können. Die Folge ist eine intuitive Gestaltung, die sich mehr oder weniger an bewährte Lösungen anlehnt.

Die Tatsache, daß eine bestehende gute Lösung in einen veränderten Bauraum oder Belastungshub, eine schlechte Lösung sein kann, wird erst erkannt, wenn teure Werkzeuge vorliegen, ohne die jedoch eine Ausprobe nicht möglich war. Die weitere Entwicklungsphase dient daher meist der Werkzeugrettung. Eine lange, zeitraubende Versuchskette der Werkstoffauswahl und Querschnittsänderung schließt sich an.

Die Kontur der Feder wird meistens nicht mehr verlassen. Man würde ja sonst wieder am Anfang seiner Entwicklung stehen und alles Probieren finge von vorne an. Liegt doch die hauptsächlichste Schwierigkeit der Formgebung in der Ermittlung der Biegelinien bei verschiedenen Belastungen.

## 2 Geltungsbereich

Beim vorliegenden Stand dieser Ausarbeitung soll nur der einseitig eingespannte Träger betrachtet werden; mit nur einer Einspannstelle und einer Laststelle an der Flachfederkontur. Bei der Berechnung der Verformung und Biegespannung wird die auftretende Schubspannung mit einem Fehler kleiner als 1% vernachlässigbar, wenn die Banddicke bzw. der Drahtdurchmesser nicht größer als 1/4 des kleinsten Konturradius gewählt wird.

## 3 Übersicht

- 4 Formelzeichen
- 5 Berechnungsgrundlagen für Formfedern

1. Teil: Bei geringer Formänderung
2. Teil: Bei großer Formänderung
3. Teil: Dimensionierung

## 4 Formelzeichen, Benennungen und Einheiten

A, B1, B2, C, D:	Faktoren der Integralfunktionen	
E	Elastizitätsmodul	N/mm <sup>2</sup>
F <sub>n</sub>	Kraft an der Laststelle (n)	N
F <sub>h</sub>	Hilfskraft zur Parallel-Verschiebung	N
I <sub>x</sub>	= 1/12 b h <sup>3</sup>	
M	Flächenträgheitsmoment um die X-Achse des Bandquerschnitts	mm <sup>4</sup>
M <sub>n</sub>	Biegemoment allgemein	Nmm
M <sub>n</sub>	Biegemoment an der Laststelle (n)	Nmm
L	gestreckte Länge des Federbandes	mm
P, Ph	Summe p(i), ph(i) der Teilbereiche	mm <sup>2</sup>
Q, T	Summe q(i), t(i) der Teilbereiche	mm <sup>3</sup>
U <sub>o</sub> , V <sub>o</sub>	Koordinaten des Teilbereich-Anfangs	mm
U <sub>s</sub> , V <sub>s</sub>	Schwerpunktkoordinaten eines Konturelementes	mm
W <sub>f</sub>	Formänderungsarbeit	Nmm

X, Y, Z	Koordinaten aus dem Flächenschwerpunkt des Bandquerschnitts	mm
X	Koordinate der Querschnitts-Breite	mm
Y	Koordinate der Querschnitts-Höhe	mm
Z	Koordinate ⊥ zur Querschnitts-Fläche	mm
u	Hebelarm ⊥ zur Krafrichtung von F <sub>n</sub>	mm
v	Hebelarm ⊥ zur Krafrichtung von F <sub>h</sub>	mm
b	Breite des Federbandes	mm
h	Dicke des Federbandes	mm
i	Laufende Nummer der Federband-Teilbereiche (i = 1, 2, 3, ..., n)	
l	Länge eines Federband-Teilbereichs	mm
Δl	Länge eines Konturelementes	mm
r	Radius eines Federband-Teilbereichs	mm
ρ <sub>o</sub>	Radius des unbelasteten Konturelements	mm
ρ	Radius des belasteten Konturelements	mm
s <sub>n</sub>	Verschiebung in Richtung F <sub>n</sub>	mm
s <sub>h</sub>	Parallel-Verschiebung in Richtung F <sub>h</sub>	mm
φ <sub>(n)</sub>	Verdrehwinkel	rad
Δφ	Biegewinkel eines Konturelementes	rad
ξ, η	Koordinaten aus der Einspannstelle	mm
α, β, γ	Winkel am Teilbereich	rad, grad
s <sub>k</sub>	Verschiebung in Richtung ξ	mm
s <sub>e</sub>	Verschiebung in Richtung η	mm
σ <sub>b(zul)</sub>	zulässige Biegespannung des Werkstoffes	N/mm <sup>2</sup>
e	Randfaserabstand h/2 bei Bandmaterial; d/2 bei Rundmaterial	mm

## 5 Berechnung und Dimensionierung

### 5.1 Formfeder mit geringer Formänderung

#### 5.1.1 Die Grundlage zur Berechnung bilden die Sätze von Castigliano

«Der Verdrehwinkel an der Einleitungsstelle eines Biegemomentes, in Richtung des Drehsinns dieses Moments, ist gleich der partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit nach dem Moment.»

«Die Verschiebung an einer Laststelle, in Richtung dieser Last, ist gleich der ersten partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit nach der betreffenden Last.»

Formelmäßig dargestellt zeigt sich – für die Formänderungsarbeit durch Biegung,

$$W_f = \int_0^L \frac{M^2}{2 E I_x} dz \tag{1.01}$$

für den Verdrehwinkel an der Laststelle (n)

$$\varphi(n) = \int_0^L \frac{M}{E I_x} \frac{\partial M}{\partial M_n} dz \tag{1.02}$$

und für die Verschiebung an der Laststelle (n)

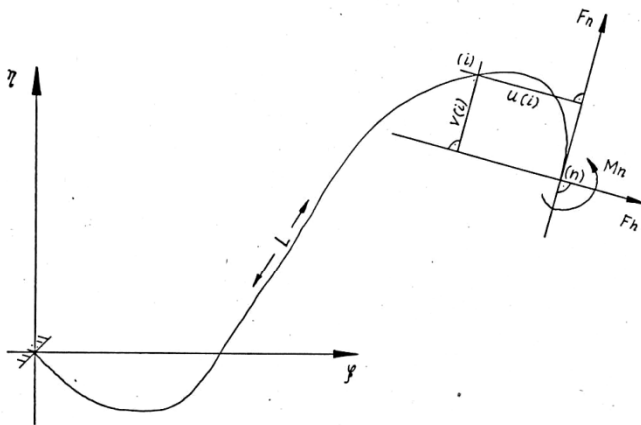
$$s_n = \int_0^L \frac{M}{E I_x} \frac{\partial M}{\partial F_n} dz \quad (1.03)$$

### 5.1.2 Ansatz zur Berechnung

Gegeben sei eine Formfeder mit konstantem Querschnitt und einer Kontur bezüglich den Einspannkoordinaten  $\xi$  und  $\eta$ .

An der Laststelle (n) wirkt eine Kraft  $F_n$  und ein Biegemoment  $M_n$  in vorgegebener Richtung.

Zur Ermittlung der parallelen Auslenkung wird eine Hilfskraft  $F_h = 0$  angesetzt, die immer senkrecht zur Wirklinie der angreifenden Kraft steht.



Für das Biegemoment an jeder Stelle (i) der Kontur gilt:

$$M(i) = F_n (-u(i)) + F_h v(i) + M_n \quad (1.04)$$

Die Drehrichtung ist hier im mathematischen Sinn positiv.

Gleichung (1.04) in Gleichung (1.01), (1.02) und (1.03) eingesetzt, ergibt für

$$W_f = \frac{F_n^2}{2 E I_x} \int_0^L u(i)^2 dz - \frac{2 M_n F_n}{2 E I_x} \int_0^L u(i) dz + \frac{M_n^2}{2 E I_x} \int_0^L dz \quad (1.05)$$

$$\varphi(n) = - \frac{F_n}{E I_x} \int_0^L u(i) dz + \frac{M_n}{E I_x} \int_0^L dz \quad (1.06)$$

$$s_n = \frac{F_n}{E I_x} \int_0^L u(i)^2 dz - \frac{M_n}{E I_x} \int_0^L u(i) dz \quad (1.07)$$

$$s_h = - \frac{F_n}{E I_x} \int_0^L u(i) v(i) dz + \frac{M_n}{E I_x} \int_0^L v(i) dz \quad (1.08)$$

### 5.1.3 Rechengang

Durch Auffinden einer allgemeinen Lösung der auftretenden Integrale, beschränkt sich die weitere Feder-Berechnung auf einfache mathematische Beziehungen.

Hierzu wird die zu berechnende Formfeder aus Kreisbögen und geraden Teilstücken zusammengesetzt.

Die ganze Kontur kann damit in einzelne, mathematisch definierbare Bereiche eingeteilt werden. Die Summe der geometrischen Kennwerte der Teilbereiche führt somit zu den Kennwerten an der Laststelle.

### 5.1.3.1 Mathematische Definitionen

für den Teilbereich und für die ganze Kontur

$$l(i) = \int_0^{l(i)} dz \rightarrow L = \sum_{i=1}^n l(i) \quad (1.09)$$

$$p(i) = - \int_0^{l(i)} u(i) dz \rightarrow P = \sum_{i=1}^n p(i) \quad (1.10)$$

$$ph(i) = \int_0^{l(i)} v(i) dz \rightarrow Ph = \sum_{i=1}^n ph(i) \quad (1.11)$$

$$q(i) = \int_0^{l(i)} u(i)^2 dz \rightarrow Q = \sum_{i=1}^n q(i) \quad (1.12)$$

$$t(i) = - \int_0^{l(i)} u(i) v(i) dz \rightarrow T = \sum_{i=1}^n t(i) \quad (1.13)$$

Nun kann man für die Gleichungen (1.05) bis (1.08) schreiben:

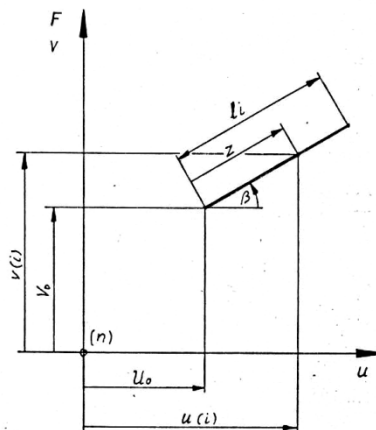
$$W_f = \frac{F_n^2}{2 E I_x} Q + \frac{2 M_n F_n}{2 E I_x} P + \frac{M_n^2}{2 E I_x} L \quad (1.14)$$

$$\varphi(n) = \frac{F_n}{E I_x} P + \frac{M_n}{E I_x} L \quad (1.15)$$

$$s_n = \frac{F_n}{E I_x} Q + \frac{M_n}{E I_x} P \quad (1.16)$$

$$s_h = \frac{F_n}{E I_x} T + \frac{M_n}{E I_x} Ph \quad (1.17)$$

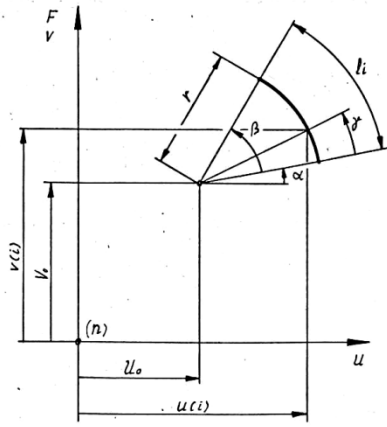
### 5.1.3.2 Geometrische Definition der Kontur Für gerade Teilbereiche (Typ 1)



$$u(i) = (u_0 + z \cos(\beta)) i \quad (1.18)$$

$$v(i) = (v_0 + z \sin(\beta)) i \quad (1.19)$$

**Geometrische Definition der Kontur für bogenförmige Teilbereiche (Typ 2)**



$$u(i) = (U_o + r \cos(\alpha + \gamma)) i$$

$$v(i) = (V_o + r \sin(\alpha + \gamma)) i$$

$$(1.20)$$

$$(1.21)$$

Bereich (i)	1	2	
U <sub>o</sub>	22,721	0	
V <sub>o</sub>	50,646	0	
r // l	32,5	45	
Alpha	300	/	
Beta	60	30	
A	1,04720	1,00000	
B1	0,86603	0,43301	
B2	-0,50000	0,25000	
C	0,74011	0,25000	
D	-0,37500	0,14434	
l(i)	34	45	L = 79 mm
p(i)	-1688	-877	P = -2565 mm <sup>2</sup>
ph(i)	1196	506	Ph = 1702 mm <sup>2</sup>
q(i)	84544	22781	Q = 107325 mm <sup>3</sup>
t(i)	-60619	-13153	T = -73772 mm <sup>3</sup>

Mit  $b = 4,55 \text{ mm}$ ,  $h = 0,3 \text{ mm}$ ,  $I_x = 0,01024 \text{ mm}^4$   
 $F > 0 \text{ N}$ ,  $M_n = 0 \text{ Nmm}$ ,  $E = 185000 \text{ N/mm}^2$

gilt nach Gleichung (1.15), (1.16), (1.17) für:

$$\varphi(n) = -1,3540 F \text{ rad/N} \rightarrow \varphi(n) = -77,6 F \text{ grad/N}$$

$$s_n = 56,653 F \text{ mm/N}$$

$$s_h = -38,952 F \text{ mm/N}$$

**5.1.3.3 Berechnung der Werte l(i), p(i), ph(i), q(i), t(i)**

Für den einzelnen Teilbereich (i) der Federkontur ist:

$$l(i) = (rA)i \quad (1.22)$$

$$p(i) = -(U_o r A + r^2 B1)i \quad (1.23)$$

$$ph(i) = (V_o r A + r^2 B2)i \quad (1.24)$$

$$q(i) = (U_o^2 r A + 2U_o r^2 B1 + r^3 C)i \quad (1.25)$$

$$t(i) = -(U_o V_o r A + V_o r^2 B1 + U_o r^2 B2 + r^3 D)i \quad (1.26)$$

hierbei ist für gerade Konturbereiche

$$r(i) = l(i) \text{ zu setzen}$$

$$A = 1$$

$$B1 = 1/2 \cos(\beta)$$

$$B2 = 1/2 \sin(\beta)$$

$$C = 1/3 \cos^2(\beta)$$

$$D = 1/6 \sin(2\beta)$$

und für bogenförmige Konturbereiche

$$A = \hat{\beta}$$

$$B1 = 2 \cos(\alpha + \beta/2) \sin(\beta/2)$$

$$B2 = 2 \sin(\alpha + \beta/2) \sin(\beta/2)$$

$$C = 1/2 (\cos(2\alpha + \beta) \sin(\beta) + \hat{\beta})$$

$$D = 1/2 \sin(2\alpha + \beta) \sin(\beta)$$

Funktion 1  
 Funktion 2  
 Funktion 3  
 Funktion 4

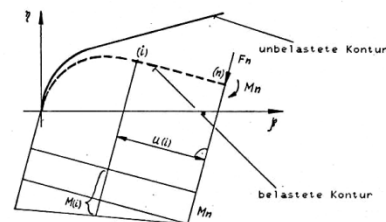
Funktion 5  
 Funktion 6  
 Funktion 7  
 Funktion 8  
 Funktion 9

**5.2 Formfeder mit großer Formänderung**

Der hierbei auftretende geometrische Fehler ist für die Beschreibung des Belastungszustandes nicht mehr vernachlässigbar.

**5.2.1 Ansatz**

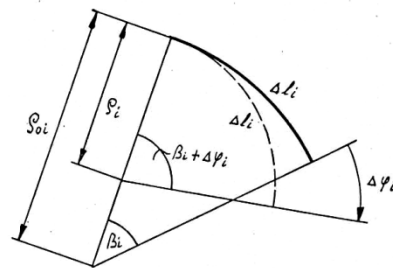
Hierzu wird eine durch äußere Belastung verformte Kontur betrachtet, die im Gleichgewicht zur inneren Belastung steht.



Für jede Stelle der Kontur gilt:

$$M(i) = F_n u(i) + M_n \quad (2.01)$$

Zur Veranschaulichung des Gleichgewichtszustandes wird ein endliches Teilstück (i) der Kontur näher beschrieben. Die Biegebeanspruchung über die Länge des Konturelementes sei konstant.



Die Formänderung infolge der Biegebeanspruchung entspricht der Krümmungsänderung.

Aus

$$\Delta l(i) = (\rho_o \hat{\beta}) i = \rho_i (\hat{\beta} + \Delta \varphi) i \quad (2.02)$$

ist

$$\Delta \varphi_i = \left( \frac{\rho_o}{\rho} \hat{\beta} - \hat{\beta} \right) i \quad (2.03)$$

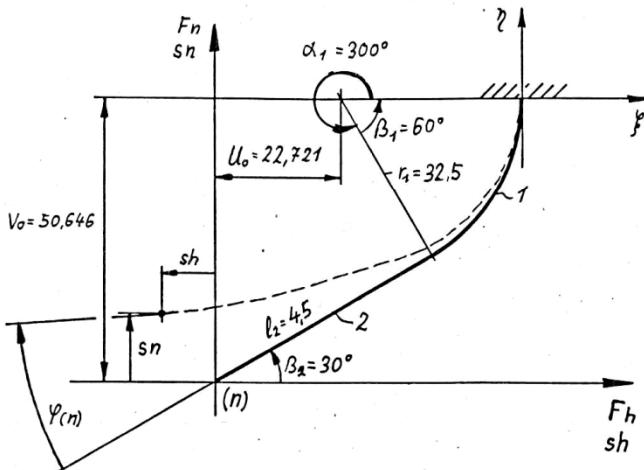
und mit

$$\hat{\beta} i = \Delta l(i) / \rho_{oi} \quad (2.04)$$

ist schließlich

$$\Delta \varphi_i = \Delta l(i) \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_o} \right) i \quad (2.05)$$

**5.1.4 Beispiel zur Berechnung einer Formfeder mit geringer Formänderung**



und mit Gleichung (1.15)

$$\Delta \varphi_i = \frac{F_n}{E I x} p(i) + \frac{M_n}{E I x} \Delta l(i) \quad (2.06)$$

Gemäß Gleichung (1.23) gilt

für gerade Konturelemente mit der Länge  $\Delta l(i)$

$$p(i) = -(U_0 \Delta l + \Delta l^2 \cdot 1/2 \cos(\beta))i \quad (2.07)$$

$$U_s(i) = (U_0 + \Delta l \cdot 1/2 \cos(\beta))i \quad (2.08)$$

für bogenförmige Konturelemente mit der Bogenlänge  $\Delta l(i)$

$$p(i) = - \left( U_0 \Delta l + \left( \frac{\Delta l}{\beta} \right)^2 \cdot 2 \cos(\alpha + \beta/2) \cdot \sin(\beta/2) \right) i \quad (2.09)$$

$$U_s(i) = \left( U_0 + \left( \frac{\Delta l}{\beta} \right) \cdot 2 \cos(\alpha + \beta/2) \cdot \sin(\beta/2) \right) i \quad (2.10)$$

Mit den Gleichungen (2.08) und (2.10) kann somit für Gleichung (1.23) geschrieben werden:

$$p(i) = -(\Delta l U_s) \quad (2.11)$$

Und damit

$$\Delta \varphi_i = \left( \frac{\Delta l}{E I x} (-F_n U_s + M_n) \right) i \quad (2.12)$$

Durch Gleichsetzen von (2.12) mit (2.05) zeigt sich für die Krümmungsänderung:

$$\left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) i = \frac{M(i)}{E I x} \quad (2.13)$$

mit

$$M(i) = (-F_n U_s + M_n) \quad (2.14)$$

## 5.2.2 Rechengang

Für die Berechnung der stark verformten Kontur wird die ganze Feder in Einzelemente aufgeteilt und die Winkel- und Krümmungsänderung für jedes dieser Elemente gemäß Gleichung (2.12) und (2.13) berechnet.

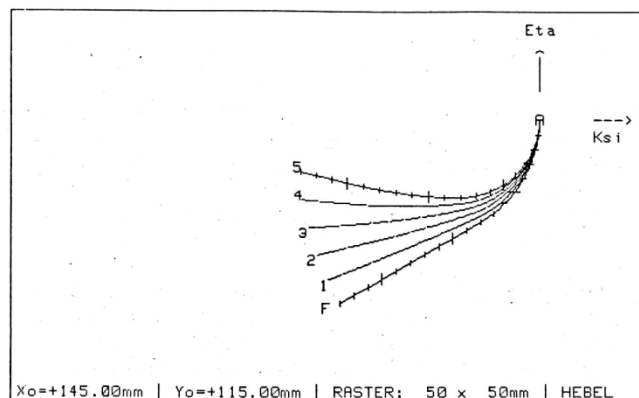
Die Summe der Winkeländerungen ergibt den gesamten Verformungswinkel an der Laststelle (n).

Die tangentielle Aneinanderreihung der verformten Elemente führt zu den Verschiebungen  $s_n$  und  $sh$ .

### 5.2.3 Beispiel zur Berechnung einer Formfeder mit großer Formänderung

#### 5.2.3.1 Beschreibung der Kontur und Festlegung der Belastungen (siehe Beispiel 5.1.4)

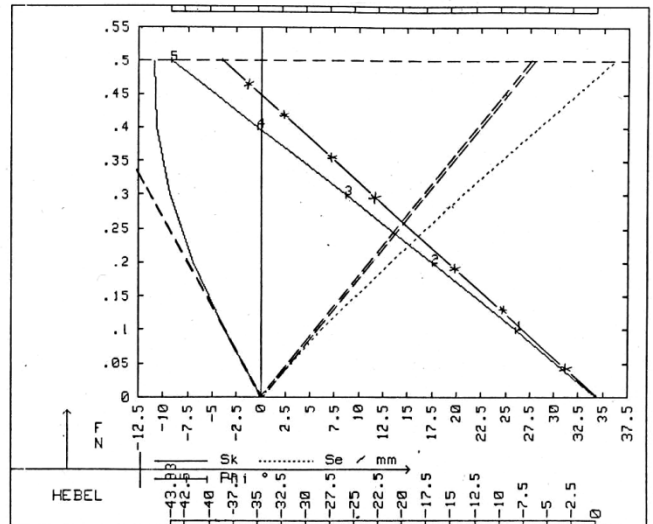
HEBEL		FLACHFEDER							
WERKSTOFF	E-Modul= 185000 N/mm <sup>2</sup>	G-Modul=	Sigma-b(zul)= 600 N/mm <sup>2</sup>	Dichte=					
			Thau-(zul)=						
Last bei:	Ks1 [mm]	Eta [mm]	M [N/mm]	F [N]	Rtg [°]	sk [mm]	se [mm]		
< A >	0,00	0,00	# 0	# 0	# 0	0,00	0,00		
M			0,00						
F	-55,2211	-50,6458		0,50	90,00=	# 0	# 0		
< B >									
ABMESSUNG	A:	h = 0,30 mm	b = 4,55 mm	Ix =	.0102375 mm <sup>4</sup>				



#### 5.2.3.3 Ergebnistabelle:

HEBEL		FLACHFEDER							
WERKSTOFF	E-Modul= 185000 N/mm <sup>2</sup>	G-Modul=	Sigma-b(zul)= 600 N/mm <sup>2</sup>	Dichte=					
			Thau-(zul)=						
Last bei:	Ks1 [mm]	Eta [mm]	M [N/mm]	F [N]	Rtg [°]	sk [mm]	se [mm]		
< A >	0,00	0,00	33,0887	0,50	-90,00	0,00	0,00		
M			0,00						
F	-66,1774	-14,5562		0,50	90,00=	-10,9563	36,0896		
< B >									
ABMESSUNG	A:	h = 0,30 mm	b = 4,55 mm	Ix =	.0102375 mm <sup>4</sup>				

#### 5.2.3.4 Kraft-Weg-Diagramm mit Vergleich zum Verfahren nach Castigliano → Beispiel 5.1.4



Kennlinien nach Castigliano: ----- sh, ..... sn, -.-.-.- phi\_n

## 5.3 Dimensionierung

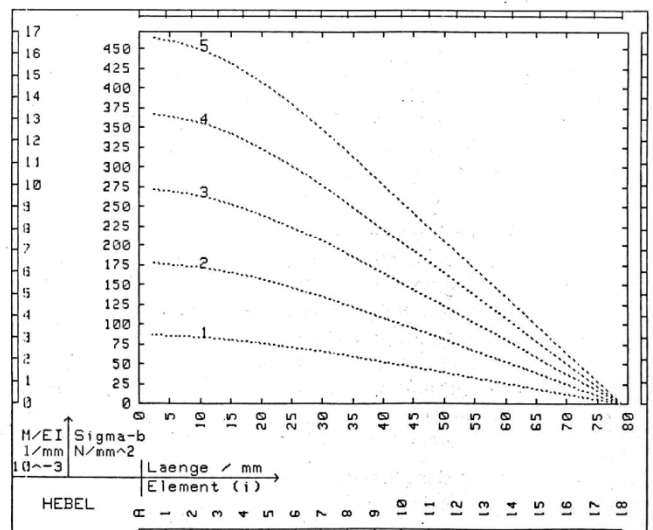
### 5.3.1 Ermittlung der Biegespannung

Bei einem Randfaserabstand  $e = h/2$  bei Bandmaterial bzw.  $d/2$  bei runden Stäben gilt an jeder Stelle der verformten Kontur für die Biegespannung:

$$\sigma_b(i) = \left( \frac{M}{I x} e \right) i \quad (3.01)$$

Mit der Elementkrümmung  $(M/EI)x_i$ , Gleichung (2.1.3), läßt sich aus dem gewählten Werkstoff und Querschnitt  $\sigma_b(i) = f(E, b, e)$  aufzeigen:

$$\sigma_b(i) = ((M/EI x) \cdot E(\text{gew.}) \cdot (b(\text{alt})/b(\text{gew.})) \cdot e(\text{gew.}))i \quad (3.02)$$



### 5.3.2 Zulässige Belastung

Die zulässige Werkstoffdicke errechnet sich aus (3.02) mit  $h(zul) = 2 e$ :

$$h(zul) = 2 (\sigma_b(zul)/E) / (M/EI)_i \quad (3.03)$$

wobei (i) die Stelle der maximalen Beanspruchung, die größte Elementkrümmung, darstellt.

Bei Verwendung von Bandmaterial ist

$$I_{xzul} = (I_x/h^3)_i h(zul)^3 \quad (3.04)$$

und das zulässige Gesamtmoment:

$$Mozul = (M/EI)_i E (gew.) I_{xzul} \quad (3.05)$$

Ist die Kontur nur mit einer Kraft F belastet worden, gilt für Fzul:

$$Fzul = Mozul/Us(i) \rightarrow Fzul = f(h) \quad (3.06)$$

Die Gleichungen (3.03) und (3.06) sind Funktionen von  $h(zul)$ . Aus ihrer graphischen Darstellung kann die zulässige Verformung entsprechend nachstehender Diagramme ermittelt werden.

#### 5.3.2.1 Beispiel

Der vorliegende Hebel (Beispiel 5.2.3) soll eine Kraft von 20 N aufnehmen können.

Der Schnittpunkt mit der Funktionslinie von Fzul führt zu  $h \leq 1,53$  mm.

Gewählt wird  $h = 1,5$  mm.

Dieser Wert wird nun auf die  $|M/EI|$  - Funktion gelotet und mit dem darüber liegenden Diagramm verbunden. Die Schnittpunkte mit den Kennlinien für  $sk$ ,  $se$  und  $\phi$  zeigen nun bei dem vorgegebenen Werkstoff und Querschnitt die zulässige Verformung.

Für:  $\phi = 12,5^\circ$ ,  $se = 10$  mm,  $sk = 5$  mm

