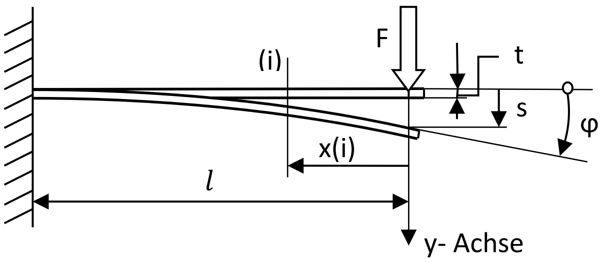
Elementare Federberechnung

-Grundformen der Federelemente-

1. Kragträger



Benennungen:

F	wirksame Kraft
l	Abstand der Kraft zur Einspannung
s	Verformung in Richtung Y
φ	Biegewinkel
t	Federbanddicke
a	Federbandbreite an der Einspannstelle
b	Federbandbreite allgemein
(i)	beliebige Schnittstelle am Federquerschnitt
M	Biegemoment
I_z	Flächenträgheitsmoment um die Querschnittsachse **z**
E	Elastizitätsmodul des Federwerkstoffs

Bestimmungsgleichungen:

Die Verformung in Richtung **Y** ergibt sich allgemein

aus $$\boxed{s = \int_0^l \frac{M_{(i)}}{EI_{z(i)}} \frac{\partial M_{(i)}}{\partial F}\, dx} \qquad [1]$$

und der Biegewinkel

aus $$\boxed{\varphi = \int_0^l \frac{M_{(i)}}{EI_{z(i)}} \frac{\partial M_{(i)}}{\partial M}\, dx} \qquad [2]$$

mit $M_{(i)} = F * x_{(i)}$

wird $\frac{\partial M_{(i)}}{\partial F} = x_{(i)}$

und $\frac{\partial M_{(i)}}{\partial M} = 1$

bei konstantem Querschnitt b*t ist I_z konstant

und damit $s = \frac{F}{EI_z} \int_0^l x_{(i)} * x_{(i)}\ dx$ und $\varphi = \frac{F}{E * I_z} \int_0^l x_{(i)}\ dx$

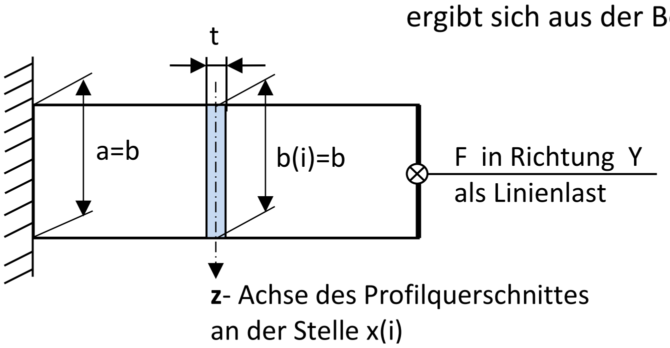
aufgelöst

wird $$\boxed{s = \frac{Fl^3}{3EI_z}} \qquad [1.1] \qquad \text{und} \qquad \boxed{\varphi = \frac{Fl^2}{2\,EI_z}} \qquad [2.1]$$

1.1 Kragträger mit konstantem Querschnitt

1.1.1 Rechteckfeder

Das Flächenträgheitsmoment I_z für Rechteckquerschnitte ergibt sich aus der Beziehung:



$$\boxed{I_z = \frac{bt^3}{12}} \quad [3]$$

und somit für

$$\boxed{s = \frac{4Fl^3}{Ebt^3}} \quad [1.2]$$

und

$$\boxed{\varphi = \frac{6Fl^2}{Ebt^3}} \quad [2.2]$$

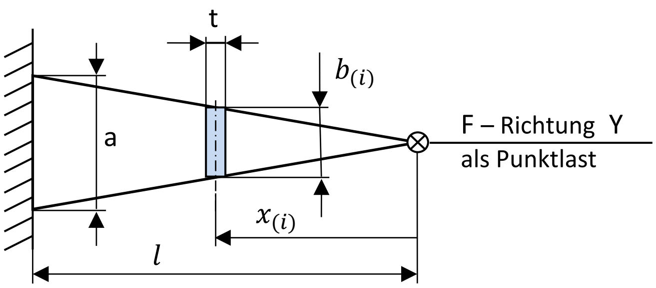
1.2 Kragträger mit nichtkonstantem Querschnitt

1.2.1 Dreieckfeder

mit $b_{(i)} = f\left(x_{(i))}\right) \rightarrow \quad b_{(i)} = \frac{a}{l} x_{(i)}$ in [3]

ist dann:

$$I_{z(i)} = \frac{a}{l} x_{(i)} \frac{t^3}{12}$$



und mit [1] wird

$$s = \frac{12Fl}{Eat^3} \int_0^l x_{(i)}\, dx$$

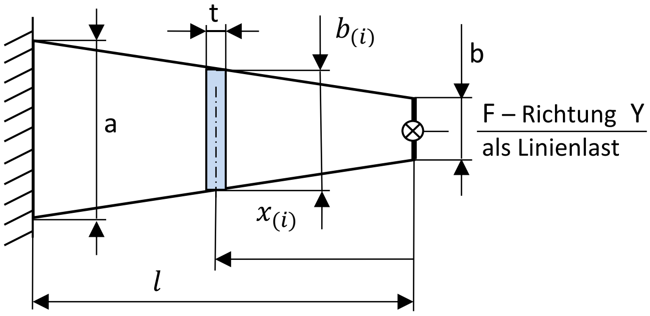
$$\boxed{s = \frac{6Fl^3}{Eat^3}} \quad [1.3]$$

und mit [2] wird $\varphi = \frac{12Fl}{Eat^3} \int_0^l dx$

$$\boxed{\varphi = \frac{12Fl^2}{Eat^3}} \quad [2.3]$$

1.2.2 <u>Trapezfeder</u>

mit $b_{(i)} = f\left(x_{(i)}\right) \rightarrow \qquad b_{(i)} = b + \frac{(a-b)}{l}x_{(i)}$



Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung wird

$\left(\frac{b}{a}\right) = \beta$ gesetzt

daraus $b = a\beta$

wird $b_{(i)} = a\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}\right)$

eingesetzt in [3] ergibt mit [1] die Verformung

$$s = \frac{12F}{Eat^3}\int_0^l \frac{{x_{(i)}}^2}{\left(\frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}+\beta\right)}dx$$

$$s = \frac{12F}{Eat^3}\cdot\frac{l^3}{(1-\beta)^3}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}+\beta\right]^2 - 2\beta\left[\frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}+\beta\right] + \beta^2\ln\left[\frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}+\beta\right]\right\}\Bigg|_{X(i)=0}^{X(i)=l}$$

$$s = \frac{12Fl^3}{Eat^3}\left[\frac{1}{(1-\beta)^3}\left(\frac{1}{2}(1-\beta^2) - 2\beta(1-\beta) - \beta^2\ln\beta\right)\right] \times \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}$$

$$s = \frac{4Fl^3}{Eat^3}\underbrace{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1-4\beta+3\beta^2-2\beta^2\ln(\beta)}{(1-\beta)^3}\right)\right]}_{\Psi} \quad \rightarrow \quad \boxed{s = \frac{4Fl^3}{Eat^3}\cdot\Psi} \quad [1.4]$$

<u>Anmerkung:</u>
Leider ist die Berechnung des Faktors Ψ in der Literatur oft fehlerhaft angegeben.
z.B als Faktor K_1 im *Handbuch Federn*, Meissner-Wanke, VEB Verlag Technik, Berlin 1988
und in *Metallfedern*, Meissner-Schorcht, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996, 2007.

- Bei Siegfried Gross: *Berechnung und Gestaltung von Metallfedern*, Springer-Verlag 1960, findet man eine Näherungsformel mit einer max. Abweichung von 4% bei β≈ 0,32 mit:

$$\boxed{K = \frac{3}{(2+\beta)}}$$

Die Grenzwerte bei β= 0 mit K=1,5 und bei β= 1 mit K=1 werden dabei genau eingehalten.

<u>Wird die Funktion der Bandbreite</u> $b_{(i)} = a\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}\right)$

in [3] eingesetzt ergibt sich mit [2] der Biegewinkel

$$\varphi = \frac{12F}{Eat^3}\int_0^l \frac{x_{(i)}}{\left(\frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}+\beta\right)}dx \rightarrow \quad \varphi = \frac{12F}{Eat^3}\cdot\left\{\frac{lx_{(i)}}{(1-\beta)} - \frac{l^2\beta\ln\left(\frac{(1-\beta)}{l}x_{(i)}+\beta\right)}{(1-\beta)^2}\right\}\Bigg|_{X(i)=0}^{X(i)=l}$$

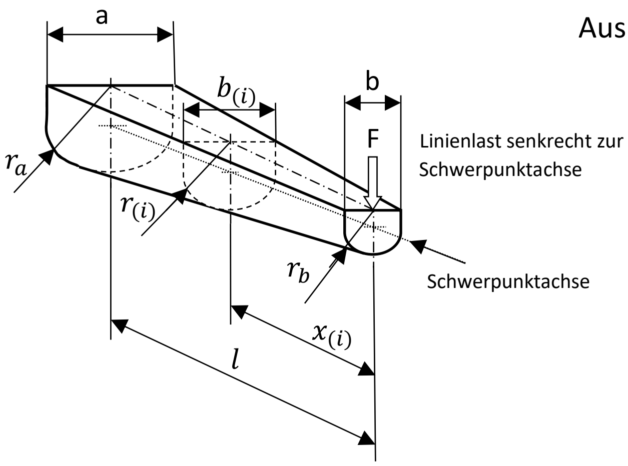
$$\varphi = \frac{6Fl^2}{Eat^3}\underbrace{\left[2\left(\frac{1-\beta+\beta\ln(\beta)}{(1-\beta)^2}\right)\right]}_{æ} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{6Fl^2}{Eat^3}\cdot æ} \quad [2.4]$$

mit:

$\beta = 0 \rightarrow æ = 2$
$\beta = 1 \rightarrow æ = 1$

1.2.3 <u>Halber Kegelstumpf</u>

. Weil dieses Formteil in vielfältiger Weise bei Handwerkzeugen eingesetzt wird, sei es im Maschinenbau oder in der Medizintechnik, sollen hier die Auslegungskriterien näher aufgezeigt werden.



Das Flächenträgheitsmoment I_z bezogen auf den Schwerpunkt eines Halbkreises als Profilquerschnitt, an der Stelle $x_{(i)}$, berechnet sich aus:

$$\boxed{I_{z(i)} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \cdot r_{(i)}^4} \qquad [4]$$

Mit $r_{(i)} = f\left(x_{(i)}\right)$ und $b_{(i)} = 2r_{(i)}$

wird $\boxed{r_{(i)} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{(a-b)}{l} \cdot x_{(i)}\right)}$ [4.1]

Zur Vereinfachung der folgenden Integration wird wieder das Verhältnis $\left(\frac{b}{a}\right) = \beta$ gesetzt

damit wird $r_{(i)} = \frac{a}{2} \cdot \left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} \cdot x_{(i)}\right)$

eingesetzt in [4] ergibt zusammen mit [1] die Verformung

$$s = \frac{16F}{(0{,}1098)Ea^4} \int_0^l \frac{{x_{(i)}}^2}{\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} x_{(i)}\right)^4} dx$$

$$s = \frac{16Fl^3}{(0{,}1098)Ea^4} \cdot \frac{1}{(1-\beta)^3} \left\{ \frac{-1}{\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} x_{(i)}\right)} + \frac{2\beta}{2\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} x_{(i)}\right)^2} - \frac{\beta^2}{3\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} x_{(i)}\right)^3} \right\} \Bigg|_{X(i)=0}^{X(i)=l}$$

$$s = \frac{16Fl^3}{(0{,}1098)Ea^4} \cdot \frac{1}{(1-\beta)^3} \left[\frac{-1}{(1)} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{(\beta)}} + \frac{\beta}{(1)} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{(\beta)}} - \frac{\beta^2}{3} + \frac{1}{3\beta} \right] \times \frac{3\beta}{3\beta}$$

$$s = \frac{16Fl^3}{(0{,}1098)Ea^4} \cdot \frac{1}{(1-\beta)^3} \left[\frac{\overbrace{-3\beta + 3\beta^2 - \beta^3 + 1}^{(1-\beta)^3}}{3\beta} \right]$$

$$s = \frac{16Fl^3}{(0{,}1098)Ea^4} \cdot \left[\frac{1}{3\beta}\right] \quad \rightarrow \quad \boxed{s = \frac{48{,}6 \cdot Fl^3}{Eba^3}} \quad [1.5] \quad \text{mit:} \quad \boxed{a = 2r_a} \quad \boxed{b = 2r_b} \quad \boxed{0 < r_b \leq r_a}$$

<u>Wird die Funktion des Profilradius</u> $r_{(i)} = \frac{a}{2} \cdot \left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} \cdot x_{(i)}\right)$
in [4] eingesetzt, ergibt sich mit [2] der Biegewinkel

$$\varphi = \frac{16F}{(0{,}1098)Ea^4} \int_0^l \frac{x_{(i)}}{\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} x_{(i)}\right)^4} dx$$

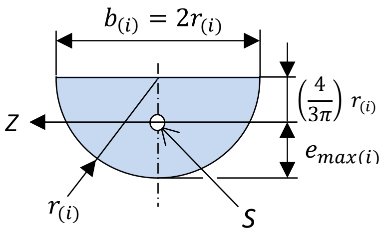
$$\varphi = \frac{16Fl^2}{(0{,}1098)Ea^4} \cdot \frac{1}{(1-\beta)^2} \left\{ \frac{-1}{2\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} x_{(i)}\right)^2} + \frac{\beta}{3\left(\beta + \frac{(1-\beta)}{l} x_{(i)}\right)^3} \right\} \Bigg|_{X(i)=0}^{X(i)=l}$$

$$\varphi = \frac{16Fl^2}{(0{,}1098)Ea^4} \cdot \frac{1}{(1-\beta)^2} \left[\frac{-1}{2(1)} + \frac{1}{2(\beta)^2} + \frac{\beta}{3(1)} - \frac{\beta}{3(\beta)^3} \right] \times \frac{6\beta^2}{6\beta^2}$$

$$\varphi = \frac{8Fl^2}{3(0{,}1098)Ea^4} \cdot \underbrace{\left[\frac{3(1-\beta^2) - 2(1-\beta^3)}{\beta^2(1-\beta)^2} \right]}_{\omega} \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{24{,}3 \cdot Fl^2}{Ea^4} \cdot \omega \quad [2.5] \text{ mit:} \quad \boxed{0 < \beta \leq 1} \quad \boxed{\beta = 1 \rightarrow \omega = 3}$$

Dipl.-Ing.(FH) Kuno Futterknecht
Ing.-Büro für Feinwerktechnik
D-87616 Wald/Ostallgäu

1.2.3.1 Bestimmung der Biegespannung am halben Kegelstumpfprofil



Profilschnitt an der Stelle $x_{(i)}$

Die größte Biegerandspannung an der Stelle $\boldsymbol{x_{(i)}}$ ist definiert durch den Quotient, Biegemoment $\boldsymbol{M_B}$ geteilt durch das Flächenträgheitsmoment $\boldsymbol{I_{z(i)}}$, mal dem maximalen Randfaserabstand $\boldsymbol{e_{\max(i)}}$ von der $\boldsymbol{Z}$–Achse, die durch den Flächenschwerpunkt $\boldsymbol{S}$ läuft.

$$\boxed{\sigma_{b(i)} = \frac{M_{B(i)}}{I_{z(i)}} e_{max(i)}} \qquad [5]$$

Mit
$$M_B = F \cdot x_{(i)}$$
$$I_{z(i)} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r_{(i)}^4$$
$$e_{\max(i)} = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) r_{(i)}$$
$$r_{(i)} = f\left(x_{(i)}\right) \rightarrow \frac{1}{2}\left[b + \frac{(a-b)}{l} x_{(i)}\right]$$

wird
$$\boxed{\sigma_{b(i)} = 83{,}91F \frac{x_{(i)}}{\left[b+\frac{(a-b)}{l}x_{(i)}\right]^3}} \qquad [5.1]$$

an der Einspannstelle bei $\boldsymbol{x_{(i)} = l}$

wirkt die Biegespannung
$$\boxed{\sigma_{b(i)} = 83{,}91F\left(\frac{l}{a^3}\right)} \qquad [5.2]$$

Es soll nun aus Gleichung [5.1] die Stelle der maximal auftretenden Biegespannung ermittelt werden. Diese Stelle $\boldsymbol{x_{(i)}}$ wird zur Unterscheidung als $\boldsymbol{m}$ bezeichnet und $\rightarrow f(m) = \frac{m}{\left(b+\frac{(a-b)}{l}m\right)^3}$

Ein Maximum für $f(m)$ liegt vor, wenn $f'(m) = 0$ gesetzt werden kann und sich für $f''(m) < 0$ ergibt.

$$f'(m) = \frac{f'_{(o)} \cdot f_{(u)} - f_{(o)} \cdot f'_{(u)}}{f_{(u)}^2} \rightarrow \frac{\left[b+\frac{(a-b)}{l}m\right]^3 - 3m\frac{(a-b)}{l} \cdot \left[b+\frac{(a-b)}{l}m\right]^2}{\left[b+\frac{(a-b)}{l}m\right]^6}$$

$$f'(m) = \frac{b-2m\left[\frac{(a-b)}{l}\right]}{\left[b+\frac{(a-b)}{l}m\right]^4} \rightarrow = 0 \ wenn\!: \left\{b - 2m\left[\frac{(a-b)}{l}\right]\right\} = 0$$

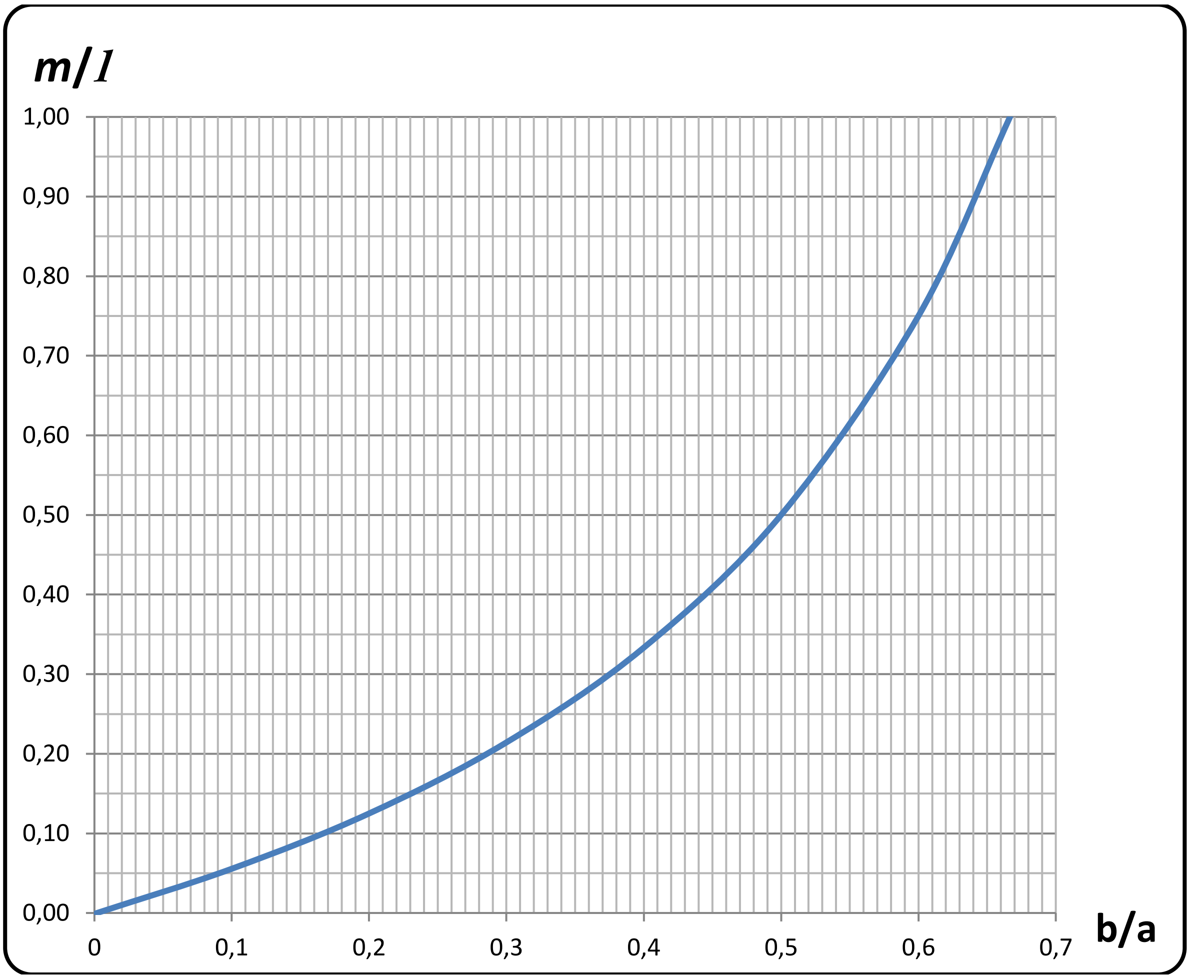
daraus
$$\boxed{m = \frac{l \cdot b}{2(a-b)}} \qquad [5.3]$$

soll die maximale Spannung bei $\boldsymbol{m = l}$ sein, ist $\boldsymbol{b} \geq \frac{2}{3}\boldsymbol{a}$ zu wählen, es gilt dann Gleichung [5.2]

$f''(m)\ wird < 0$, da in $f'(m)$ die Ableitung der Funktion im Zähler < 0 ist und der Nenner >0 bleibt.
Somit liegt mit [5.2] ein Maximum vor, für $\sigma_{b(i)}$ bei $x_{(i)} = m$

[5.3] eingesetzt in [5.1] wird die maximale Biegespannung bei $\boldsymbol{m} < l$

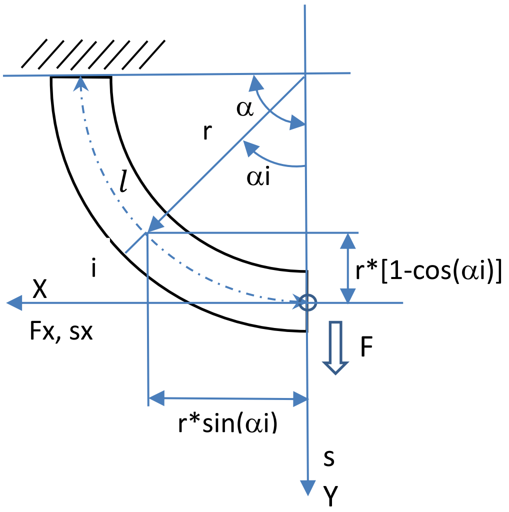
$$\sigma_{b(m)} = 83{,}91F \frac{l \cdot b}{2(a-b)\left[b+\frac{\cancel{(a-b)}}{\cancel{l}} \cdot \frac{\cancel{l} b}{2\cancel{(a-b)}}\right]^3} \rightarrow \boxed{\sigma_{b(m)} = \frac{12{,}43 \cdot F \cdot l}{(a-b)b^2}} \qquad [5.4] \ \text{für} \ \boxed{b \leq \frac{2}{3}a}$$



Stelle der maximalen Biegespannung bei ***m*** im Verhältnis zur Gesamtlänge ***l*** ,
in Abhängigkeit der Profilbreite **a** und ***b*** *bzw.*$\boldsymbol{r_a}$ und $\boldsymbol{r_b}$
am halben Kegelstumpfprofil für $\boldsymbol{b/a\ \ bzw.\, r_b/r_a \leq\ 2/3}$.

2. Gekrümmter Träger

2.1 Verformung in Richtung Y



Das Biegemoment an der Stelle **i**
ergibt sich bei einer Kraft **F** in Richtung **Y**

mit $\boxed{M_{(i)} = F \cdot r \cdot \sin(\alpha_i)}$ [6]

Des Weiteren ist das axiale Flächenträgheitsmoment
$\boldsymbol{I_z}$, gültig für den geraden Träger,
zu ersetzen mit den Querschnittsparameter
$\boldsymbol{Z_z}$, gültig für den gekrümmten Träger.

Übertragen in [1], wird die Verformung in
Richtung **Y**

$$s = \int_0^{\alpha} \frac{M_{(i)}}{EZ_{z(i)}} \frac{\partial M_{(i)}}{\partial F}\, dl$$

Mit $\frac{\partial M_{(i)}}{\partial F} = r \cdot \sin(\alpha_i)$ und $dl = r\, d\alpha$ sowie $Z_z = const.$

wird $s = \frac{F \cdot r^2}{EZ_z} \int_0^{\alpha} \sin^2(\alpha_i)\, r\, d\alpha$

und somit
$$\boxed{s = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot Z_z}\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\alpha)\right]} \qquad [6.1]$$

Für den ¼ Kreis mit $\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ wird $s = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot Z_z}\left[\frac{\pi}{4}\right]$

und für den Halbkreis mit $\alpha = \pi$ wird $s = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot Z_z}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

2.2 Biegewinkel an der Kraftangriffstelle

Der Biegewinkel an der Lastangriffsstelle ergibt sich aus dem Biegemoment an der Stelle **i** nach Gleichung **[6]** übertragen in Gleichung **[2]** und $\boldsymbol{I_z}$ ersetzt mit $\boldsymbol{Z_z}$, wie oben, für den gekrümmten Träger

$$\varphi = \frac{F \cdot r}{E \cdot Z_z} \int_0^{\alpha} \sin \alpha_i \cdot (1) \cdot r\, d\alpha$$

$$\varphi = \frac{F \cdot r^2}{E \cdot Z_z} \left| -\cos \alpha_i \right|_0^{\alpha}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{F \cdot r^2}{E \cdot Z_z}\left[1 - \cos \alpha\right]} \qquad [6.2]$$

2.2 Auslenkung in Richtung X

Der gekrümmte Träger, belastet mit einer Kraft „F“ in Richtung „Y“, erfährt eine seitliche Auslenkung in Richtung „X“.
Zur Bestimmung dazu wird für das Biegemoment an der Stelle „i“ eine Kraft Fx= 0 angesetzt.

Mit $M_{(i)} = F \cdot r \cdot \sin(\alpha_i) + F_x \cdot r \cdot [1 - \cos(\alpha_i)]$

und $\left[M_{(i)} \cdot \left(\frac{\partial M_{(i)}}{\partial F_x}\right)\right] = F \cdot r \cdot \sin(\alpha_i) \cdot r \cdot [1 - \cos(\alpha_i)]$

wird $s_x = \frac{F \cdot r^2}{E Z_z} \int_0^{\alpha} [\sin(\alpha_i) - \sin(\alpha_i) \cdot \cos(\alpha_i)] \cdot r \, d\alpha$

$$s_x = \frac{F \cdot r^3}{E Z_z} \left| -\cos(\alpha_i) - \frac{1}{2} \sin^2(\alpha_i) \right|_0^{\alpha}$$

$$\boxed{s_x = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot Z_z} \left[1 - \cos(\alpha) - \left(\frac{1}{2}\right) \sin^2(\alpha)\right]} \qquad [6.3]$$

Für den ¼ Kreis mit $\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ wird $s_x = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot Z_z} \left[\frac{1}{2}\right] \quad \to 0{,}637\, s$

und für den Halbkreis mit $\alpha = \pi$ wird $s_x = \frac{F \cdot r^3}{E \cdot Z_z} [2] \quad \to 1{,}273\, s$

2.2 Der Querschnittsparameter Z_z für den stark gekrümmten Träger

Definition:

$$Z_z = \int_{-\frac{1}{2}(t,d)}^{+\frac{1}{2}(t,d)} \left[\frac{r}{(r+z)}\right] z^2 \, dA \quad \to \equiv \lambda \cdot A \cdot r^2$$

mit A der Querschnittsfläche des Trägerprofils

und $\lambda = \left(\frac{r}{t}\right) \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{t}{2r}\right)}{\left(1 - \frac{t}{2r}\right)}\right] - 1$ (1 für den Rechteckquerschnitt $b \cdot t$

bzw. $\lambda = \tan^2 \left[\frac{1}{2} arcsin \left(\frac{d}{2r}\right)\right]$ (1 für den Kreisquerschnitt $\emptyset\, d$

Anmerkung:
Für den schwach gekrümmten, geraden Träger mit $\underline{r \to \infty}$ wird $Z_z \equiv I_z$

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ \int \left[\frac{r}{(r+z)}\right] z^2 \, dA \right\} \quad \to \quad \left\{ \int z^2 \, dA \right\} \equiv I_z$$

entsprechend dem Flächenträgheitsmoment

(1 Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau, Band 1, Zwölfte Auflage, Neudruck 1966, Seite 377, 378